

---

# ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU DILOGARITHME

par

Ismael Soudères

---

**Résumé.** — Cet article démontre une “nouvelle” famille d’équations fonctionnelles  $(Eq_n)$  ( $n \geq 4$ ) satisfaites par le dilogarithme de Rogers. Ces équations fonctionnelles reflètent la combinatoire des coordonnées diédrales des espaces de modules de courbes de genres 0,  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Pour  $n = 4$  on retrouve la relation de dualité et pour  $n = 5$  la relation à 5 termes du dilogarithme. Dans une seconde partie, on démontre que la famille  $(Eq_n)$  se réduit à la relation à 5 termes. C’est, à la connaissance de l’auteur, la première fois qu’une famille infinie d’équations fonctionnelles du dilogarithme ayant un nombre croissant de variables ( $n - 3$  pour  $(Eq_n)$ ) se réduit à la relation à 5 termes.

**Abstract (Functional equations for Rogers dilogarithm).** — This paper proves a “new” family of functional equations  $(Eq_n)$  for Rogers dilogarithm. These equations rely on the combinatorics of dihedral coordinates on moduli spaces of curves of genus 0,  $\mathcal{M}_{0,n}$ . For  $n = 4$  we find back the duality relation while  $n = 5$  gives back the 5 terms relation. It is then proved that the whole family reduces to the 5 terms relation. In the author’s knowledge, it is the first time that an infinite family of functional equations for the dilogarithm with an increasing number of variables ( $n - 3$  for  $(Eq_n)$ ) is reduced to the 5 terms relation.

## Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Coordonnées diédrales et espaces de modules $\mathcal{M}_{0,n}$ .....	3
3. Équations fonctionnelles du dilogarithme.....	8
4. Réduction au cas de la relation à 5-termes et de $\mathcal{M}_{0,5}$ .....	10
5. Quelques remarques d’ouverture.....	15
Références.....	16

---

La première partie de ce travail a été essentiellement effectuée pour un exposé lors de la conférence “Numbers and Physics”; conférence d’ouverture du trimestre “Multiple Zeta Values, Multiple Polylogarithms, and Quantum Field Theory”, ICMAT, Madrid, sept.-dec. 2014. L’auteur remercie les organisateurs pour leur invitation sans laquelle ce travail n’aurait pas commencé. Enfin, je tiens à remercier particulièrement H. Gangl pour son écoute, ses explications et ses encouragements.

## 1. Introduction

La fonction dilogarithme  $Li_2$  est une fonction classique de l'analyse connue au moins depuis Euler. Plus récemment les travaux de D. Zagier [Zag88, Zag89, Zag07] ont permis de mieux comprendre comment la fonction  $Li_2$  est au carrefour de la théorie des nombres et de la géométrie moderne. Ces dernières années l'étude des systèmes  $Y$ , des algèbres amassées ont mis au jour de "nouvelles équations fonctionnelles" satisfaites par la fonction  $Li_2$  (voir par exemple [Cha05, Kel11, IIK<sup>+</sup>13a]). Dans cet article nous prouvons une famille d'équations fonctionnelles satisfaites par  $Li_2$  en nous appuyant sur la géométrie des espaces de modules de courbes en genre 0.

Pour  $z \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $|z| < 1$ , la fonction dilogarithme  $Li_2$  est définie par

$$Li_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Elle généralise la fonction

$$Li_1(z) = -\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad \text{pour } |z| < 1$$

et satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz} Li_2(z) = -\frac{1}{z} \log(1-z) = \frac{1}{z} Li_1(z)$$

qui induit, via une représentation intégrale, le prolongement analytique de  $Li_2$  sur  $\mathbb{C} \setminus [1; \infty[$ .

Le dilogarithme de Rogers est défini sur l'intervalle  $]0, 1[$  par

$$L(x) = Li_2(x) + \frac{1}{2} \log(x) \log(1-x)$$

étendu par  $L(0) = 0$  et  $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ . Le dilogarithme satisfait nombre d'équations fonctionnelles (voir par exemple [Zag07]). Parmi les plus familières, on trouve la relation de dualité

$$(1) \quad L(x) + L(1-x) = L(1)$$

et la relation à 5-termes

$$(2) \quad L(x) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) + L(y) + L(1-xy) = 3L(1).$$

Les deux équations ci-dessus sont valables a priori lorsque tous les arguments sont compris entre 0 et 1. Pour une extension à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  (et à valeur dans  $\mathbb{R}/\frac{\pi^2}{2}\mathbb{Z}$ , on consultera [Zag07, Chap. II, section A].

Les symétries de ces deux relations correspondent aux symétries des espaces de modules de courbes en genre 0 :  $\mathcal{M}_{0,4}$  et  $\mathcal{M}_{0,5}$ . On regardera donc ces deux relations sur la "cellule standard" de  $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{R})$  respectivement ([Bro09, section 2.7]). F. Brown dans [Bro09] a introduit les coordonnées diédrales  $u_{i,j} = u_{j,i}$  sur les espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Ces coordonnées sont associées aux cordes strictes d'un polygone dont les sommets sont numérotés par les éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . Il est à noter que les indices  $i$  et  $j$  font référence aux numéros des sommets. L'ensemble des

“numérotations” possibles des sommets, modulo l’action du groupe diédral  $D_{2n}$ , définit un recouvrement affine de l’espace  $\mathcal{M}_{0,n}$  ([Bro09, Section 2]. La cellule standard est alors définie par le choix de la numérotation cyclique des sommets de 1 à  $n$ , c’est la structure diédrale  $\delta$  standard, et la condition  $u_{i,j} > 0$ . On se place dans le cas de la structure diédrale standard. On a en particulier :

$$i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{avec } i \neq j-1, j, j+1 \pmod n.$$

Ces coordonnées ne sont pas indépendantes et F. Brown a montré en particulier que pour  $i$  fixé, toute coordonnée  $u_{i,j}$ , comme toute fonction sur  $\mathcal{M}_{0,n}$  s’écrit comme une fonction rationnelle en les  $u_{i,j}$  l’indice  $j$  variant de  $i+1$  à  $i+n-1$  modulo  $n$  (Corollaire 2.23 de [Bro09]). On montre ici

**Théorème (Théorème 3.1).** — Soit  $n \geq 4$  et  $\chi_n$  l’ensemble des  $n(n-3)/2$  paires  $\{i, j\}$  avec  $1 \leq i, j \leq n$  tel que  $i, j, i+1$  et  $j+1$  soient distincts modulo  $n$ . Lorsque  $u_{i,j} \leq 0$  pour tout  $i$  et  $j$ , on a

$$(Eq_n) \quad \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} L(u_{i,j}) = \frac{(n-3)(n-2)}{2} L(1).$$

L’équation  $(Eq_n)$  pour  $n = 5$  est exactement l’équation à 5 termes précédemment citée. On montre aussi

**Théorème (Théorème 4.1).** — L’équation  $(Eq_n)$  pour  $n = 5$  implique l’équation  $(Eq_n)$  pour tout  $n \geq 4$ .

L’auteur espère par ailleurs que cette approche éclairera sous un autre angle les équations fonctionnelles du dilogarithme associées à l’étude des algèbres amassées et des  $Y$ -systèmes [Cha05, Kel11, IIK<sup>+</sup>13a, IIK<sup>+</sup>13b].

La section suivante rappelle certains aspects des coordonnées diédrales et leurs comportements vis à vis des applications d’oubli de points marqués entre espaces de modules de courbes. La section 3 prouve le Théorème 3.1. La section 4 prouve le théorème 4.1 après quelques rappels sur les applications d’oublis de points marqués entre espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,n}$ .

## 2. Coordonnées diédrales et espaces de modules $\mathcal{M}_{0,n}$

**2.1. Coordonnées diédrales.** — On rappelle ici brièvement la construction et quelques propriétés des coordonnées diédrales sur  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Pour plus de détails le lecteur consultera [Bro09, Section 2].

Soit  $n \geq 4$ . On note  $\mathcal{M}_{0,n}$  l’espace de module de courbes de genre 0 à  $n$  point marqués. Si  $(\mathbb{P}^1)_*^n$  représente l’espace des  $n$ -uplets d’éléments distincts de  $p^1$ , l’espace  $\mathcal{M}_{0,n}$  s’identifie à  $(\mathbb{P}^1)_*^n$  modulo l’action diagonale de  $\mathrm{PSL}_2$ .

Pour quatre éléments distincts  $i, j, k, l$  de  $\{1, \dots, n\}$  le birapport  $[ij|kl]$  est défini par

$$[ij|kl] = \frac{(z_i - z_k)(z_j - z_l)}{(z_i - z_l)(z_j - z_k)}$$

où  $z_1, \dots, z_n$  sont les coordonnées affines standard sur  $(\mathbb{P}^1)^n$ . Ces birapports sont  $\text{PSL}_2$  invariants mais ne sont bien évidemment pas indépendants (par exemple  $[i|j|k|l] = [lk|ji]$ ). Parmi ceux-ci on distingue les *coordonnées diédrales* définies pour  $i, i+1, j, j+1$  distinct modulo  $n$  par

$$u_{i,j} = [i| i+1 | j+1 | j]$$

qui ne dépend que de la paire  $\{i, j\}$ . On note  $\chi_n$  l'ensemble de telles paires.

Le nom *diédral* prend sa source dans la représentation suivante. Le groupe des permutations sur  $n$  éléments  $S_n$  agit sur  $\mathcal{M}_{0,n}$  par permutation des points marqués. Les points réels de  $\mathcal{M}_{0,n}$  se décomposent en une union de composantes connexes. Pour l'une d'elle, la cellule standard, les points marqués sont dans l' "ordre cyclique" naturel sur le cercle  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  :  $z_1 < z_2 < \dots < z_n < z_1$ . L'action du groupe diédral préserve cette cellule ainsi que l'ensemble des birapports  $u_{i,j}$ . F. Brown commence lui par fixer une structure diédrale sur les points marqués (c'est à dire par choisir une composante connexe). Nous sommes ici dans un cas particulier de sa construction. On note  $\delta$ , ou  $\delta_n$  si la précision du nombre de points marqués est nécessaire, l'ordre cyclique standard  $\{1 < 2 < \dots < n < 1\}$ .

Les paires  $\{i, j\}$  s'identifient aux cordes d'un  $n$ -gone dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ . Les birapports  $u_{i,j}$  satisfont les relations

$$(3) \quad \prod_{\substack{a \leq i \leq b-1 \\ c \leq j \leq d-1}} u_{i,j} + \prod_{\substack{b \leq k \leq c-1 \\ d \leq l \leq a-1}} u_{k,l} = 1$$

où l'ensemble ordonné  $\{1 < \dots < n\}$  a été identifié à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  muni de l'ordre cyclique standard  $1 < 2 < \dots < n = 0 < 1$ .

L'identification entre les paires  $\{i, j\}$  et les cordes d'un polygone est représentée à la figure 1. Il faut noter que les côtés du polygone portent le label correspondant au point marqué et que le sommet  $i$  représente le couple  $(z_i, z_{i+1})$ . Les relations données

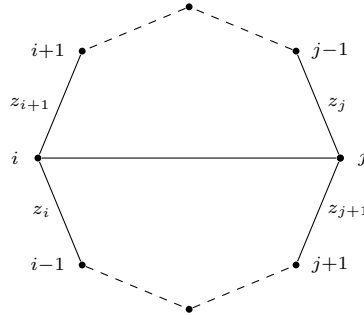


FIGURE 1.

par l'équation (3) sont représentées à la figure 2. Les indices des coordonnées  $u_{i,j}$  premier terme de l'équation (3) sont dans la partie **A** pendant que ceux du deuxième terme sont dans la partie **B** : les deux ensembles de cordes se coupent complètement

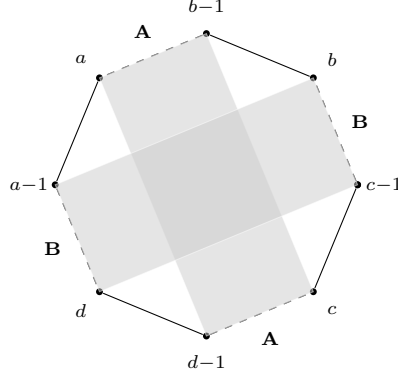


FIGURE 2.

([Bro09, p. 384 et Figure 2]). Dans le cas où **A** ne contient qu'une corde, la relation (3) s'écrit

$$(4) \quad u_{a,c} + \prod_{\substack{a+1 \leq k \leq c-1 \\ c+1 \leq l \leq a-1}} u_{k,l} = 1$$

On note  $I_n \subset \mathbb{Z}[u_{i,j}]$  l'idéal engendré par les équations (3) pour  $\{i, j\} \in \chi_n$ . F. Brown définit l'espace  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  par

$$\mathcal{M}_{0,n}^\delta = \text{Spec}(\mathbb{Z}[u_{i,j} | \{i, j\} \in \chi_n] / I_n)$$

et montre la suite d'inclusions

$$\mathcal{M}_{0,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n}^\delta \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n}},$$

ainsi que ([Bro09, Lemme 2.5])

$$\mathcal{M}_{0,n} = \text{Spec} \left( \mathbb{Z}[u_{i,j}, \frac{1}{u_{i,j}} | \{i, j\} \in \chi_n] / I_n \right);$$

$\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$  désignant ci-dessus la compactification de Deligne-Mumford de  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Le cellule standard fermée  $\Phi_n$  correspond aux points réels de  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$  pour lesquels  $u_{i,j} \geq 0$  pour toute paire  $\{i, j\}$ , on a aussi ([Bro09, Section 2.7])

$$\Phi_n = \{0 \leq u_{i,j} \leq 1 \text{ pour tout } \{i, j\} \in \chi_n\} \subset \mathcal{M}_{0,n}^\delta(\mathbb{R}).$$

On note  $\Phi_n^\circ$  la cellule ouverte.

Si les coordonnées diédrales ne sont pas indépendantes, on peut cependant en choisir des sous-ensembles donnant des coordonnées globales sur  $\mathcal{M}_{0,n}$  ([Bro09, Corollaire 2.23]). On travaille ici avec les sous-ensembles “en étoile”

$$\{u_{1,3}, \dots, u_{1,n-1}\}.$$

Chaque birapport  $[z_{i_1} z_{i_2} | z_{i_3} z_{i_4}]$  s'exprime ainsi comme une fonction rationnelle en les  $u_{u_{1,j}}$ . Dans le cas où  $n = 5$ , les relations (3) donnent en particulier

$$u_{2,5} = 1 - u_{1,3}u_{1,4}, \quad u_{2,4}u_{2,5} = 1 - u_{1,3}, \quad u_{3,5}u_{2,5} = 1 - u_{1,4},$$

ce qui se traduit avec  $x = u_{1,3}$  et  $y = u_{1,4}$  par

$$u_{1,3} = x, \quad u_{2,4} = \frac{1-x}{1-xy}, \quad u_{3,5} = \frac{1-y}{1-xy}, \quad u_{1,4} = y, \quad u_{2,5} = 1-xy.$$

On retrouve les 5-termes de la relation de 5-cycle de  $L$ .

**2.2. Applications d'oubli de points marqués.** — Soit  $J$  un sous-ensemble de  $S = \{1, \dots, n\}$ . On note  $f_J$  le morphisme

$$f_J : \mathcal{M}_{0,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n-|J|}$$

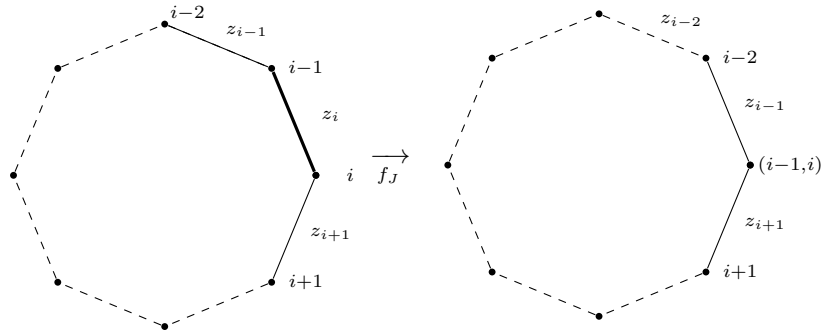
oubliant les points marqués d'indice dans  $J$ . Le morphisme induit  $\mathcal{M}_{0,n}^\delta \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n-|J|}^\delta$  est aussi noté  $f_J$ . Ces morphismes sont compatibles à la composition dès que  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ .

Les coordonnées diédrales sont compatibles avec ces applications de points marqués. Il faut cependant être attentif à indexer les points marqués de l'espace cible  $\mathcal{M}_{0,n-|J|}$  par les éléments de

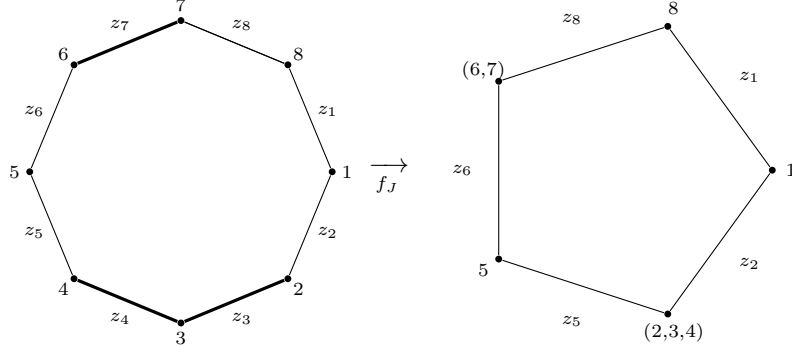
$$S \setminus J = \{1, \dots, n\} \setminus J.$$

Dans ce cas, le polygone correspondant aura des côtés décorés par  $z_i$  avec  $i \in S \setminus J$  et des sommets décorés par des uplets  $(i, i+1, \dots, i+k)$  traduisant les points oubliés  $z_{i+1}, \dots, z_{i+k}$ .

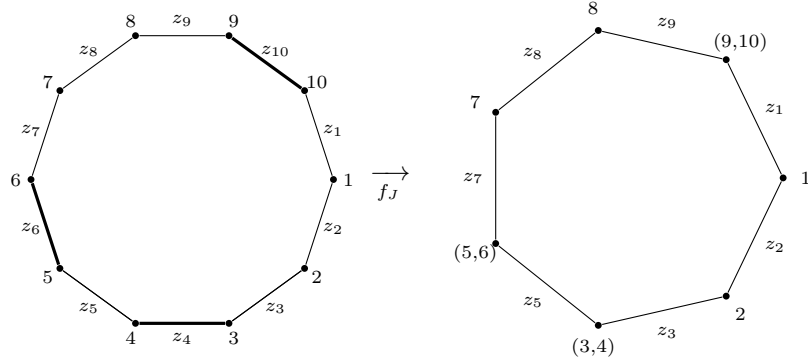
**Exemple 2.1.** — 1. Pour  $J = \{i\}$ , on représente  $f_J$  par



2. Pour  $J = \{3, 4, 7\} \subset \{1, \dots, 8\}$ , on représente  $f_J$  par



3. On s'intéressera ici au cas où  $J$  est constitué de suites successives d'un indice sur deux. Par exemple pour  $J = \{4, 6\} \cup \{10\} \subset \{1, \dots, 10\}$  :



Dans cet exemple, une des “suites d'un indice sur deux” est  $(4, 6)$ , l'autre simplement 10.

Le  $n - |J|$  polygone correspondant à  $\mathcal{M}_{0,n-|J|}$  mais décoré en tenant compte du morphisme  $f_J$  est noté  $\Gamma_n^J$ . Un sommet  $\mathbf{i} = (i, i+1, \dots, i+k)$  de ce polygone rencontre ainsi les côtés décorés par  $z_i$  et  $z_{i+k+1}$ . Comme précédemment, à une corde stricte de  $\Gamma_n^J$  correspond un unique birapport

$$u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n,J} = [z_i z_{i+k+1} | z_{j+l+1} z_j] \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_{0,n-|J|})$$

où  $\mathbf{i} = (i, \dots, i+k)$  et  $\mathbf{j} = (j, \dots, j+l)$ . Si  $m = n - |J|$ , on écrira parfois simplement  $u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^m$  pour  $u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n,J}$ . Lorsque  $\mathbf{i} = (i)$  (ou  $\mathbf{j} = (j)$ ), on utilisera parfois la notation plus simple  $u_{i,j}^{n,J} = u_{i,j}^m$ . Ces simplifications de la notation s'expliquent par la compatibilité des coordonnées diédrales vis à vis de  $f_J$  ([Bro09, Lemma 2.9])

$$(5) \quad f_T^*(u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n,J}) = \prod_{\substack{i \in \mathbf{i} \\ j \in \mathbf{j}}} u_{i,j}$$

où par un abus de notation  $\mathbf{i}$  (resp.  $\mathbf{j}$ ) représente l'ensemble associé au uplet  $\mathbf{i}$  (resp.  $\mathbf{j}$ ).

**Remarque 2.2.** — L'équation ci-dessus montre en particulier que  $f_T^*(u_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{n,J})$  ne dépend que de  $\mathbf{i}$  et de  $\mathbf{j}$ . Ceci justifie la simplification  $u_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{n,J} = u_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^m$  que l'on pourrait simplement noter  $u_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ .

### 3. Équations fonctionnelles du dilogarithme

Après ces préliminaires, on montre ici que le dilogarithme de Rogers  $L$  satisfait une équation fonctionnelle sur  $\mathcal{M}_{0,n}$  pour chaque  $n \geq 4$ . On fixe  $n \geq 4$  et on note  $\Phi_n^\circ$  la cellule standard ouverte de  $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{R})$ . Cette cellule  $\Phi_n^\circ$  peut s'identifier au simplexe ouvert standard  $\Delta_{n-3} = \{0 < t_1 < \dots < t_{n-3} < 1\}$  (coordonnées simpliciales de  $\mathcal{M}_{0,n}$ ) ou avec le cube  $[0,1]^{n-3}$  (coordonnées cubiques de  $\mathcal{M}_{0,n}$ ). On utilisera en général ici les coordonnées diédrales présentées précédemment.

**Théorème 3.1.** — Pour tout point  $P$  de  $\Phi_n^\circ$  on a

$$(Eq_n) \quad \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} L(u_{i,j}) = \frac{(n-3)(n-2)}{2} L(1)$$

où par un abus de notations  $u_{i,j} = u_{i,j}(P)$ .

**Corollaire 3.2.** — On repère  $P \in \Phi_n^\circ$  par ses coordonnées  $P = (u_{1,3}, \dots, u_{1,n-1})$  avec  $u_{i,j} \in [0,1]$ . On a alors :

$$(6) \quad \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} L(f_{i,j}(u_{1,3}, \dots, u_{1,n-1})) = \frac{(n-3)(n-2)}{2} L(1)$$

où  $f_{1,j}(u_{1,3}, \dots, u_{1,n-1}) = u_{1,j}$  pour  $j$  dans  $\{3, n-1\}$  et où, pour  $i, j \neq 1$ ,  $f_{i,j}$  est une fonction rationnelle en les  $u_{1,j}$  donnée par les relations de l'équation (3) (cf. [Bro09, Corollaire 2.23]).

*Preuve du théorème 3.1.* — On montre que la différentielle du membre de droite de (Eq<sub>n</sub>) est nulle ; la constante étant déterminée par la limite pour  $u_{1,3} = \dots = u_{1,n-1} = 0$  et les relations issues de (3).

On rappelle que  $L_2(x) = Li_2(x) + \frac{1}{2} \log(x) \log(1-x)$ . Pour une paire  $\{i, j\}$  de  $\chi_n$  on a donc

$$d(L(u_{i,j})) = -\frac{1}{2} \frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) + \frac{1}{2} \frac{d(1 - u_{i,j})}{1 - u_{i,j}} \log(u_{i,j}).$$

Dans le cas d'une corde, la relation (3) se réduit à l'équation (4) :

$$u_{i,j} + \prod_{\substack{i+1 \leq k \leq j-1 \\ j+1 \leq l \leq i-1}} u_{k,l} = 1$$



où l'on identifie  $\{1, \dots, n\}$  avec  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  toujours muni de l'ordre "cyclique standard". On en déduit en particulier :

$$\log(1 - u_{i,j}) = \sum_{\substack{i+1 \leq k \leq j-1 \\ j+1 \leq l \leq i-1}} \log(u_{k,l}) \quad \text{et} \quad \frac{d(1 - u_{i,j})}{1 - u_{i,j}} = \sum_{\substack{i+1 \leq k \leq j-1 \\ j+1 \leq l \leq i-1}} \frac{d(u_{k,l})}{u_{k,l}}.$$

En notant  $E_n$  le membre de droite de (Eq<sub>n</sub>) on a alors

$$\begin{aligned} 2d(E_n) &= \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} 2d(L(u_{i,j})) \\ &= \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( -\frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) + \frac{d(1 - u_{i,j})}{1 - u_{i,j}} \log(u_{i,j}) \right) \\ &= - \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) \right) + \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \frac{d(1 - u_{i,j})}{1 - u_{i,j}} \log(u_{i,j}) \right) \\ &= - \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) \right) \\ &\quad + \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \left( \sum_{\substack{i+1 \leq k \leq j-1 \\ j+1 \leq l \leq i-1}} \frac{d(u_{k,l})}{u_{k,l}} \right) \log(u_{i,j}) \right) \end{aligned}$$

En intervertissant les deux signes de somme de la dernière ligne on trouve

$$\begin{aligned} 2d(E_n) &= - \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) \right) \\ &\quad + \sum_{\{k,l\} \in \chi_n} \left( \frac{d(u_{k,l})}{u_{k,l}} \left( \sum_{\substack{k+1 \leq i \leq l-1 \\ l+1 \leq j \leq k-1}} \log(u_{i,j}) \right) \right). \end{aligned}$$

La somme des logarithmes du deuxième terme est égale à  $\log(1 - u_{k,l})$  d'où

$$2d(E_n) = - \sum_{\{i,j\} \in \chi_n} \left( \frac{du_{i,j}}{u_{i,j}} \log(1 - u_{i,j}) \right) + \sum_{\{k,l\} \in \chi_n} \left( \frac{d(u_{k,l})}{u_{k,l}} \log(1 - u_{k,l}) \right) = 0;$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

En spécialisant l'une des coordonnées  $u_{i,j} = 0$ , les relations (3) se transforment en deux familles de relations du même type; l'une des familles correspondant à  $\mathcal{M}_{0,n_1}$ ,

l'autre à  $\mathcal{M}_{0,n_2}$  avec  $n_1 + n_2 = n + 2$ . Cette décomposition est l'équivalent en coordonnées de l'inclusion de  $\overline{\mathcal{M}_{0,n_1}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,n_2}}$  dans  $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$  ([Bro09, Section 2.3]). Ainsi, par spécialisation, l'équation fonctionnelle  $(\text{Eq}_n)$  implique l'équation  $(\text{Eq}_{n-1})$ . Dans le cas  $n = 5$ , on obtient en particulier :

**Lemme 3.3.** — *En spécialisant  $y = u_{1,4} = 0$  l'équation*

$$L(u_{1,3}) + L(u_{2,4}) + L(u_{3,5}) + L(u_{1,4}) + L(u_{2,5}) = 3L(1)$$

*devient*

$$L(u_{1,3}) + L(u_{2,4}) = L(1) \quad \text{avec } u_{1,3} + u_{2,4} = 1.$$

*On retrouve ici la relation de réflexion.*

*Démonstration.* — Les relations (3) sur  $\mathcal{M}_{0,5}$  donnent en particulier

$$\begin{aligned} u_{2,5} &= 1 - u_{1,3}u_{1,4}, & u_{3,5} &= 1 - u_{1,4}u_{2,4}, \\ u_{1,3} + u_{2,4}u_{2,5} &= 1. \end{aligned}$$

En spécialisant  $u_{1,4} = 0$ , on trouve  $u_{2,5} = u_{3,5} = 1$  et  $u_{1,3} + u_{2,4} = 1$ . □

#### 4. Réduction au cas de la relation à 5-termes et de $\mathcal{M}_{0,5}$

**Théorème 4.1.** — *La famille d'équation  $(\text{Eq}_n)$  ( $n \neq 5$ ) se déduit de l'équation fonctionnelle à 5-termes de  $L$ ,  $(\text{Eq}_5)$ .*

On a vu que  $(\text{Eq}_5)$  implique  $(\text{Eq}_4)$ . Le cas  $n = 6$  étant un peu à part car 6 est “trop petit”, on le traite ci-dessous. Pour  $n = 6$  on a

$$\begin{aligned} L(u_{1,3}) + L(u_{2,4}) + L(u_{3,5}) + L(u_{4,6}) + L(u_{1,5}) + L(u_{2,6}) + \\ L(u_{1,4}) + L(u_{2,5}) + L(u_{3,6}) = 6L(1). \end{aligned}$$

On note  $E_6$  le membre de droite de l'équation ci-dessus. En utilisant les applications d'oubli  $\mathcal{M}_{0,6} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$  pour  $J = \{2\}$ ,  $J = \{4\}$  et  $J = \{6\}$ , on écrit  $E_6$  comme une somme  $E_5$ , membres de l'équation  $(\text{Eq}_5)$ . Par exemple pour  $J = \{2\}$ , on a l'équation associée à  $\mathcal{M}_{0,5}$ ,

$$\sum_{(i,j) \in \chi_5} L(u_{i,j}^{6,J}) = 3L(1)$$

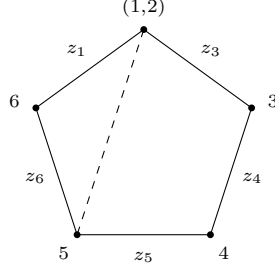
En composant chacune des fonctions ci-dessus avec  $f_J : \mathcal{M}_{0,6} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$ , on obtient

$$\sum_{(i,j) \in \chi_5} L(f_J^*(u_{i,j}^{6,J})) = 3L(1).$$

En utilisant l'équation (5), ceci se réécrit

$$L(u_{3,5}) + L(u_{4,6}) + L(u_{1,5}u_{2,5}) + L(u_{1,4}u_{2,4}) + L(u_{3,6}) = 3L(1).$$

Visuellement le membre de droite se représente par le polygone associé à  $f_J$



étant entendu que l'on applique  $L$  au pull-back des coordonnées données par les cordes et que l'on somme chacun de ces termes. Les pull-back se lisent directement sur le polygone ; dans l'exemple ci-dessus pour la corde  $((1,2), 5)$ , on "lit" :

$$f_J^*(u_{(1,2),5}^{6,J}) = u_{1,5}u_{2,5}.$$

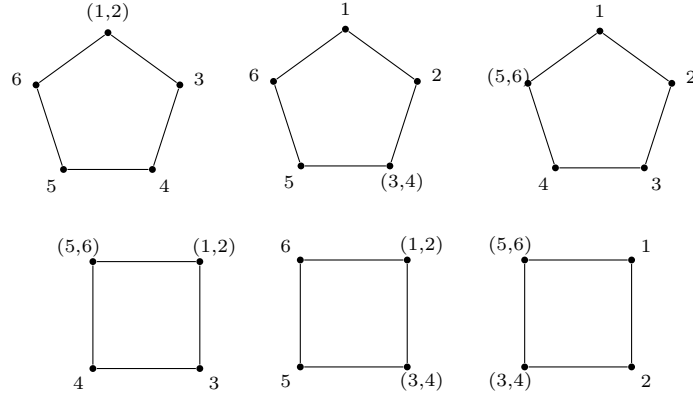
On procède de même pour  $J = \{4\}$  et  $J = \{6\}$  obtenant ainsi trois équations (Eq<sub>5</sub>), que l'on additionne pour obtenir

$$E_6 + L(u_{1,5}u_{2,5}) + L(u_{1,4}u_{2,4}) + L(u_{3,6}u_{4,6}) + L(u_{1,4}u_{1,3}) + L(u_{2,5}u_{2,6}) + L(u_{3,5}u_{3,6}) = 9L(1).$$

Enfin les relations (3) pour  $\mathcal{M}_{0,6}$  donnent

$$u_{1,4}u_{2,4} + u_{3,5}u_{3,6} = 1, \quad u_{3,6}u_{4,6} + u_{1,5}u_{2,5} = 1, \quad u_{1,4}u_{1,3} + u_{2,5}u_{2,6} = 1.$$

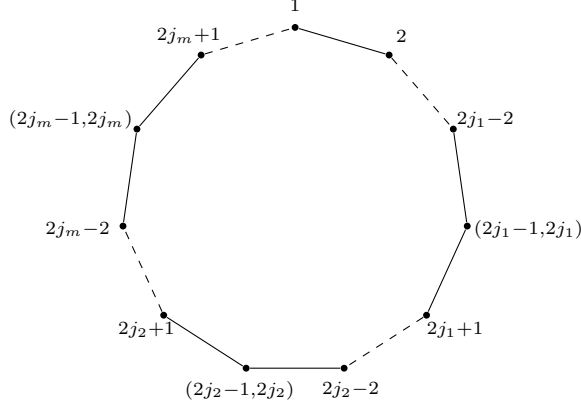
On conclut alors le cas de Eq<sub>6</sub>, en utilisant la relation de réflexion. Les relations Eq<sub>4</sub> et Eq<sub>5</sub> utilisées ici se résument par les trois pentagones et les trois carrés ci-dessous (on a omis de noter les  $z_i$ ) :



*Preuve du théorème 4.1.* — On raisonne par récurrence en supposant que l'équation Eq<sub>5</sub> implique les relations Eq<sub>m</sub> pour  $m < n$ . Le cas initial de  $n = 6$  ayant déjà été traité, on suppose ici que  $n \geq 7$ .

On suppose d'abord que  $n = 2k$  avec donc  $k \geq 4$ . On note  $K$  l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  et pour  $J \subset K$  on note  $f_{2J} : \mathcal{M}_{0,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,n-|J|}$  le morphisme oubliant les points marqués  $z_{2j}$  pour  $j$  dans  $J$ .

Pour  $J = \{j_1, \dots, j_l\}$ , le polygone  $\Gamma_n^{2J}$  associé à  $\mathcal{M}_{0,n-|J|}$  et  $f_{2J}$  se représente par



L'équation fonctionnelle  $\text{Eq}_{n-|J|}$  est une conséquence de  $\text{Eq}_5$  par l'induction et induit par composition avec  $f_{2J}$  une équation sur  $\mathcal{M}_{0,n}$

$$\sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \chi_{n-l}} L(f_{2J}^*(u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n, 2J})) = \frac{(n-l-3)(n-l-2)}{2} L(1)$$

avec  $l = |J|$ . On note  $E_{2J}$  le membre de droite de cette équation et  $E_n = E_{2\emptyset}$  le membre de droite de  $\text{Eq}_n$  :

$$\sum_{\{i, j\} \in \chi_n} L(u_{i, j}) = \frac{(n-3)(n-2)}{2} L(1).$$

Les constantes s'ajoutant correctement, il nous suffit de montrer que

$$E = \sum_{l=0}^k (-1)^l \left( \sum_{\substack{J \subset K \\ |J|=l}} E_{2J} \right) = 0.$$

On a déjà remarqué que  $f_{2J}^*(u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n, 2J})$  ne dépend pas de  $J$  tout en entier mais simplement de la paire  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  et que

$$u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = f_{2J}^*(u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{n, 2J}) = \prod_{i \in \mathbf{i}, j \in \mathbf{j}} u_{i, j}.$$

On peut donc réécrire la somme  $E$  en terme des cordes  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  possible :

$$E = \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} C_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} L(u_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}).$$

On montre ci après par une étude combinatoire que  $C_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = 0$ .

Les cordes  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  sont de trois types :

- $\mathbf{i} = (2i - 1, 2i)$  et  $\mathbf{j} = (2j - 1, 2j)$  pour  $i, j \in K$ ,
- $\mathbf{i} = (i) = i$  et  $\mathbf{j} = (2j - 1, 2j)$  pour  $j \in K$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\mathbf{i} = (i) = i$  et  $\mathbf{j} = (j) = j$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Pour chaque type, il faut ajouter certaines restrictions afin de ne travailler qu'avec des cordes strictes. Pour le premier type de corde  $\mathbf{i} = (2i - 1, 2i)$  et  $\mathbf{j} = (2j - 1, 2j)$ ,  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  est une corde stricte de  $\Gamma_n^{2J}$  si et seulement si  $i, j \in \mathbb{K}$  et  $i \neq j - 1, j, j + 1$  modulo  $k$ . La seconde condition caractérise l'existence d'une telle corde. Lorsqu'elle est satisfaite, il y a donc  $\binom{k-2}{l-2}$  ensembles  $J$  possibles avec  $|J| = l \geq 2$ . On trouve ainsi

$$C_{(2i-1, 2i), (2j-1, 2j)} = \sum_{l=2}^k (-1)^l \binom{k-2}{l-2} = 0.$$

Lorsque la corde  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{i, j\}$  est du troisième type, on a nécessairement  $l \leq k - 2$  et  $i \neq j - 1, j, j + 1$ . C'est une corde de  $\Gamma_n^{2J}$  si et seulement

$$\left\{ \frac{i+1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{j+1}{2}, j \right\} \cap K = \{1, \dots, k\} = \emptyset.$$

Deux des éléments de l'ensemble de droite étant des demi-entiers, la condition ne porte que sur deux éléments de  $K$ . On a donc

$$C_{i,j} = \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l \binom{k}{l} = 0.$$

On raisonne de même dans le cas d'une corde de type "intermédiaire"  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{i, (2j - 1, 2j)\}$  pour obtenir

$$C_{i, (2j-1, 2j)} = \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \binom{k-1}{l-1} = 0.$$

Ceci conclut le cas  $n = 2k$  ( $k \geq 4$ ). Dans le cas où  $n$  est impair  $n = 2k + 1$  se traite par étude combinatoire similaire avec  $K = \{1, \dots, k\}$ .  $\square$

On présente ci-dessous les polygones  $\Gamma_n^{2J}$  présents dans la preuve pour  $n = 8$  puis  $n = 7$ . Le cas  $n = 8, K = \{1, 2, 3, 4\}$  :

$$\begin{aligned}
 (|J| = 0) & \quad + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of an 8-sided polygon with vertices labeled 1 through 8 in clockwise order starting from the top.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 1) & \quad - \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of an 8-sided polygon with vertices labeled 1 through 8. Edges (1,2), (3,4), (5,6), and (7,8) are highlighted.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 2) & \quad + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of an 8-sided polygon with vertices labeled 1 through 8. Edges (1,2), (3,4), (5,6), and (7,8) are highlighted.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 3) & \quad - \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of an 8-sided polygon with vertices labeled 1 through 8. Edges (1,2), (3,4), (5,6), and (7,8) are highlighted.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 4) & \quad + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of a 4-sided polygon (square) with vertices labeled (1,2), (3,4), (5,6), and (7,8) in clockwise order.} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Le cas  $n = 7$ ,  $K = \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned}
 (|J| = 0) & \quad + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A heptagon with vertices labeled 1 to 7 clockwise starting from the top.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 1) & \quad - \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A heptagon with vertices labeled 1 to 7 clockwise starting from the top. Edges (1,2) and (3,4) are marked with (1,2) and (3,4) respectively.} \\ \text{Diagram 3: A heptagon with vertices labeled 1 to 7 clockwise starting from the top. Edges (3,4) and (5,6) are marked with (3,4) and (5,6) respectively.} \\ \text{Diagram 4: A heptagon with vertices labeled 1 to 7 clockwise starting from the top. Edges (5,6) and (3,4) are marked with (5,6) and (3,4) respectively.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 2) & \quad + \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 5: A pentagon with vertices labeled 1 to 5 clockwise starting from the top. Edges (1,2) and (3,4) are marked with (1,2) and (3,4) respectively.} \\ \text{Diagram 6: A pentagon with vertices labeled 1 to 5 clockwise starting from the top. Edges (3,4) and (5,6) are marked with (3,4) and (5,6) respectively.} \\ \text{Diagram 7: A pentagon with vertices labeled 1 to 5 clockwise starting from the top. Edges (5,6) and (3,4) are marked with (5,6) and (3,4) respectively.} \end{array} \right) \\
 (|J| = 3) & \quad - \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 8: A diamond shape with vertices labeled 1 to 4 clockwise starting from the top. Edges (1,2) and (3,4) are marked with (1,2) and (3,4) respectively.} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## 5. Quelques remarques d'ouverture

À la connaissance de l'auteur c'est la première fois qu'une famille infinie d'équations fonctionnelles pour le dilogarithme de Rogers en un nombre croissant de variables est réduit à la relation à 5 termes ; l'équation  $(Eq_n)$  étant une équation en  $n - 3$  variables. Ce travail renforce ainsi l'idée que l'équation à 5 termes (avec la relation d'inversion liant  $L(x)$  et  $L(1/x)$ ) est universelle pour le dilogarithme : toute équation fonctionnelle du dilogarithme en des fonctions rationnelles d'un nombre quelconque de variables s'y réduit. Le cas d'une variable est lui bien connu [Woj91, Zag88].

On remarque par ailleurs que la preuve du théorème 4.1, montrant que la relation à 5 termes implique les équations  $(Eq_n)$ , repose uniquement sur la combinatoire des espaces de modules de courbes  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Ainsi, si une fonction  $F$  satisfait  $(Eq_n)$  pour un certain  $n_0 \geq 6$ , on peut espérer montrer par la même méthode que la même fonction  $F$  satisfait  $(Eq_n)$  pour tout  $n$  assez grand ( $n/2 \geq n_0$ ) après avoir traité un nombre fini de cas particuliers.

En guise de conclusion, on remarque que le travail ci-dessus est aussi valide dans le cadre du groupe de Bloch  $B_2(\mathbb{F})$  où  $\mathbb{F}$  est un corps de nombre. Très brièvement, le groupe de Bloch  $B_2(\mathbb{F})$  peut se définir (voir par ex. [Zag07, Chap.1 §4] ou [Sus87,

**Sus90]**) comme le quotient de

$$\ker \begin{pmatrix} \mathbb{Z}[\mathbb{F}^*] \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Z}}^2(\mathbb{F}^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ [x] \longmapsto [x] \wedge [1-x] \end{pmatrix}$$

par le sous-groupe  $Q_2$  engendré par

$$[x] + \left[\frac{1}{x}\right], \quad [x] + [1-x], \quad [x] + \left[\frac{1-x}{1-xy}\right] + \left[\frac{1-y}{1-xy}\right] + [y] + [1-xy].$$

La preuve du théorème 3.1 montre que les combinaisons linéaires de l'équation (6) ; qui traduisent les coordonnées diédrales en termes de fonction rationnelles ;

$$\sum_{\{i,j\} \in \chi_n} [f_{i,j}(u_{1,3}, \dots, u_{1,n-1})]$$

définissent des éléments du groupe de Bloch  $B_2(\mathbb{F})$ . On montrerait de même des équations fonctionnelles ( $\text{Eq}_n$ ) associées au dilogarithme de Bloch-Wigner. Le théorème 4.1 montre que ces éléments sont déjà dans  $Q_2$ .

Enfin, toujours en relation avec la  $K$ -théorie des corps de nombre, un traitement similaire dans le cadre des cycles algébriques et des groupes de Chow est possible. Le contrôle de l'admissibilité des cycles ainsi que le comportement de ceux-ci vis à vis des applications d'oubli de points marqués  $\mathcal{M}_{0,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,k}$  nécessite cependant quelques précautions. On développera cette approche dans un travail ultérieur qui s'intéressera par ailleurs à prouver d'autres relations classiques des polylogarithmes purement en terme de cycles algébriques, ceci en s'appuyant sur les constructions explicites de [Sou12].

## Références

- [Bro09] F. C. S. BROWN – « Multiple zeta values and periods of moduli spaces  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$  », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 3, p. 371–489.
- [Cha05] F. CHAPOTON – « Functional identities for the Rogers dilogarithm associated to cluster  $Y$ -systems », *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), no. 5, p. 755–760.
- [IIK<sup>+</sup>13a] R. INOUE, O. IYAMA, B. KELLER, A. KUNIBA & T. NAKANISHI – « Periodicities of T-systems and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I : type  $B_r$  », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **49** (2013), no. 1, p. 1–42.
- [IIK<sup>+</sup>13b] ———, « Periodicities of T-systems and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II : types  $C_r$ ,  $F_4$ , and  $G_2$  », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **49** (2013), no. 1, p. 43–85.
- [Kel11] B. KELLER – « On cluster theory and quantum dilogarithm identities », in *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, p. 85–116.
- [Sou12] I. SOUDÈRES – « Cycle complex over  $\mathbb{P}^1$  minus 3 points : toward multiple zeta values cycles. », <http://arxiv.org/abs/1210.4653>, 2012.
- [Sus87] A. A. SUSLIN – « Algebraic  $K$ -theory of fields », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 222–244.



- [Sus90] ———, «  $K_3$  of a field, and the Bloch group », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **183** (1990), p. 180–199, 229, Translated in Proc. Steklov Inst. Math. 1991, no. 4, 217–239, Galois theory, rings, algebraic groups and their applications (Russian).
- [Woj91] Z. WOJTKOWIAK – « The basic structure of polylogarithmic functional equations », in *Structural properties of polylogarithms*, Math. Surveys Monogr., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 205–231.
- [Zag88] D. ZAGIER – « The remarkable dilogarithm », *J. Math. Phys. Sci.* **22** (1988), no. 1, p. 131–145.
- [Zag89] ———, « The dilogarithm function in geometry and number theory », in *Number theory and related topics (Bombay, 1988)*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 12, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1989, p. 231–249.
- [Zag07] D. ZAGIER – « The dilogarithm function », in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, Springer, Berlin, 2007, p. 3–65.

---

10 septembre 2015

ISMAEL SOUDÈRES, Universität Osnabrück, Institut für Mathematik, Albrechtstr. 28a, DE-49076 Osnabrück, Germany, ismael.souderes@uni-osnabrueck.de